UNIVERSITE CLAUDE BERNARD – LYON I

DIPLÔME NATIONAL DE DOCTORAT (Arrêté du 25 mai 2016)

Date de la soutenance : **9 Janvier 2017**

Nom de famille et prénom de l'auteur : **Daniel Alejandro PARRA VOGEL**

Titre de la thèse : **"Théorie spectrale et de la diffusion pour les réseaux cristallins."**

RESUME DE LA THESE

Dans cette thèse nous nous intéressons à différents aspects de la théorie spectrale et de la diffusion pour des opérateurs qui agissent sur des espaces discrets. Ces opérateurs sont les analogues discrets des opérateurs différentiels sur des variétés Riemanniennes pour le Chapitre 1 et Chapitre 2, et des opérateurs pseudodifférentiels magnétiques sur R^d dans le Chapitre 3.

Dans le Chapitre 1 nous étudions des opérateurs de Schrödinger périodiques sur des cristaux topologiques ainsi que leurs perturbations. Les cristaux topologiques sont une version abstraite de graphes périodiques qui permettent de modéliser des cristaux parfaits. Ils sont donnés par un recouvrement d'un graphe fini χ par un graphe infini X tel que X admet un action de Z^d compatible avec le recouvrement. Nous sommes donc amenés à étudier des opérateurs de Schrödinger périodiques de la forme $H_0 = \Delta + V$ sur X, où l'opérateur Δ correspond au Laplacien discret périodique sur X et V est un potentiel périodique. Le Laplacien périodique est défini une fois qu'on a choisi une mesure m sur X périodique par rapport à l'action de Z^d. Ce cadre permet d'étudier deux types de perturbations. D'un côté, on peut modifier la mesure par une mesure m'non périodique, et d'un autre côté on peut aussi remplacer le potentiel par un potentiel non périodique V'. En utilisant la méthode de l'opérateur conjugué, on démontre, sous certaines conditions de convergence à l'infini de m'vers m et de V' vers V, la stabilité de la nature fine du spectre (partie absolument continue, partie singulière, finitude locale des valeurs propres) de $H = \Delta' + V'$ par rapport à celle de H_0. Ici, Δ' correspond au Laplacien discret défini par la mesure m'. Dans ce sens, nos résultats généralisent des résultats de Boutet de Monvel et Sahbani obtenus pour des perturbation multiplicatives uniquement dans le cas du graphe Z^d. Notons que pour la convergence de V' vers V on a utilisé deux types de conditions normalement décrites dans la littérature comme de courte portée et de longue portée. Pour la convergence de m'vers m nous considérons uniquement une convergence à courte portée. Notons également que le résultat pour la perturbation métrique du graphe n'était pas disponibles même dans le cadre simple du graphe Z^d.

Dans le Chapitre 2 nous étendons l'étude de ce sujet à d'autres opérateurs sur des cristaux topologiques. On montre notamment que la décomposition de Floquet-Bloch qui était nécessaire pour l'étude de l'opérateur Δ peut être déduite de la décomposition de l'opérateur Gauss-Bonnet. Cet opérateur est l'analogue discret de l'opérateur

Gauss-Bonnet pour des variétés et peut être écrit sous comme $(d+d^*)$ où d est l'analogue discret de la dérivation extérieure. Grâce à cette décomposition on peut montrer que le spectre a, comme pour le Laplacien, une structure de bandes. De plus, en réutilisant des résultats abstraits du Chapitre 1 on montre aussi que cette structure est stable pour des perturbations à la fois multiplicative et du graphe. Comme corollaire on obtient des résultats similaires pour le Laplacien agissant sur les arêtes.

Finalement, dans le Chapitre 3 on s'intéresse à l'étude de certains opérateurs de Schrödinger magnétiques sur Z^d. Ces opérateurs sont définis par des symboles et des potentiels magnétiques définis sur $Z^d \times Z^d$. En utilisant des méthodes C^*-algébriques, on montre que la continuité d'une famille de symboles et de champs magnétiques assurent la continuité des composantes spectrales de la famille d'opérateurs de Schrödinger correspondants ainsi que des gap spectraux. Notons que le cadre C^*-algébrique permet de traiter la continuité magnétique de façon invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire que la continuité est imposée au champ magnétique et non pas au potentiel magnétique.